YÜZEYLER TEORİSİ ARA SINAV SORULARI (18.11.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $\alpha : I \to E^3$, $\alpha(t) = (2+\sin t\cos t,\ 5+\cos t, 7+\sin^2 t)$ eğrisinin bütün normal düzlemlerinin $(2,5,7)$ noktasından geçtiğini ispatlayınız**(20P.)**.

2.) E^3 de M, denklemi $x_1^2+x_2^2=1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M,\ \alpha(t) = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

3.) $Z = \frac{1}{4}(x^2+y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(20P.)**.

4.) $M_1 = \{\ (x_1,x_2,x_3)\ \big|\ x_1^2+x_2^2=4\ \} \subset E^3$,

$M_2 = \{\ (x_1,x_2,x_3)\ \big|\ x_1^2-x_2^2-2x_3=0\} \subset E^3$

yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q=\left(1,\sqrt{3},?\right)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz **(20P.)**.

5.) Şekil operatörünü tanımlayınız ve şekil operatörünün lineer olduğunu gösteriniz**(50P)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

C-1) $Sp\{N,B\}$ tarafından gerilen normal düzlemin denklemini bulalım: Y, normal düzlemde alınan temsilci bir nokta olsun.

$\overrightarrow{\alpha(t)Y}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ vektörleri aynı düzlemde olduklarından lineer bağımsızdırlar. Dolayısıyla,

$$\det(\overrightarrow{\alpha(t)Y}, \vec{N}, \vec{B}) = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \overrightarrow{N \times B} \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, T \rangle = 0 \Rightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \rangle = 0$$

$$\Longrightarrow \langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \alpha'(t) \rangle = 0.$$

$Y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ olsun.

$\overrightarrow{\alpha(t)Y} = Y - \alpha(t) = (y_1 - 2 - \sin t\cos t,\ y_2 - 5 - \cos t,\ y_3 - 7 - \sin^2 t)$ ... (1)

$\alpha(t) = (2 + \underbrace{\sin t\cos t}_{\frac{1}{2}\sin 2t},\ 5 + \cos t,\ 7 + \sin^2 t)$ old. dan

$\alpha'(t) = (\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\cos 2t,\ -\sin t,\ \overbrace{2\sin t\cos t}^{\sin 2t})$

$\Rightarrow \alpha'(t) = (\cos 2t,\ -\sin t,\ \sin 2t)$ ... (2)

bulunur. $\langle \overrightarrow{\alpha(t)Y}, \alpha'(t) \rangle = 0$ normal düzlemin denklemini verdiğinden (2) ve (2) ifadelerinden

$$(\cos 2t)(y_1 - 2 - \tfrac{1}{2}\sin 2t) + (-\sin t)(y_2 - 5 - \cos t) + (\sin 2t)(y_3 - 7 - \sin^2 t) = 0$$

normal düzlem denklemidir.

$(2,5,7)$ bu denklemi sağlarsa, bütün normal düzlemlerinin $(2,5,7)$ noktasından geçtiğini söyleriz.

$(\cos 2t)(\cancel{2} - \cancel{2} - \frac{1}{2}\sin 2t) + (-\sin t)(\cancel{5} - \cancel{5} - \cos t) + (\sin 2t)(\cancel{7} - \cancel{7} - \sin^2 t) \stackrel{?}{=} 0$

$= -\frac{1}{2}\cos 2t\sin 2t + \sin t\cos t - \sin 2t\sin^2 t$

$= -\frac{1}{2}\cos 2t\sin 2t + \sin t\cos t - 2\sin t\cos t\sin^2 t$

$= -\frac{1}{2}(1 - \sin^2 t)(2\sin t\cos t) + \sin t\cos t - 2\sin t\cos t\sin^2 t$

$= (-\frac{1}{2} + \sin^2 t)(2\sin t\cos t) + \sin t\cos t - 2\sin t\cos t\sin^2 t$

$= -\sin t\cos t + \cancel{2\sin t\cos t\sin^2 t} + \sin t\cos t - \cancel{2\sin t\cos t\sin^2 t}$

$= 0$. Buna göre, bütün normal düzlemleri $(2,5,7)$ noktasından geçer.

$$\boxed{\begin{aligned} \cos 2t &= 1 - 2\sin^2 t \\ \cos 2t &= 2\cos^2 t - 1 \\ \sin 2t &= 2\sin t\cos t \end{aligned}}$$

c - 2) $\alpha'(t) = (-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$

$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$

$$\Rightarrow N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\cancel{2}(x_1, x_2, 0)}{\cancel{2}\sqrt{\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{1}}}$$

$$\Rightarrow N = (x_1, x_2, 0).$$

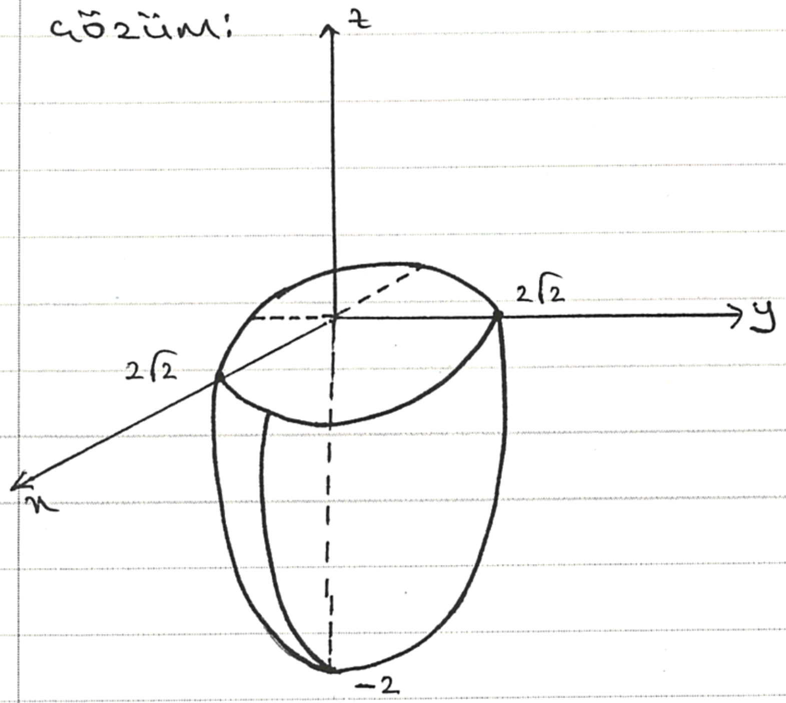
$$\Rightarrow N\Big|_{\alpha(t)} = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre; $\alpha''(t) = -a^2 N\Big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t) \perp T_M(\alpha(t))$.

O halde α eğrisi silindir üzerinde geodezik bir eğridir.

Soru 3: $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x,2y,-4)$,

$\nabla f=(2x,2(y-1),2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$\nabla f=\lambda\nabla g$

veya buradan

$(x,y-1,z)=\lambda(x,y,-2)$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır.

$x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Rightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

$1/2$	8	-24	24	-7
		4	-10	7
	8	-20	14	0

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(8\lambda^2 - 20\lambda + 14) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(4\lambda^2 - 10\lambda + 7) = 0$

$4\lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0$ denkleminin köklerini araştıralım:

$\Delta = b^2 - 4ac$ den $\Delta = 100 - 4.4.7 = -12 < 0$ olduğundan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3 - 24\lambda^2 + 24\lambda - 7 = 0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda = \frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z=-1$, $x=0$ ve $x^2+y^2-4z=8$ den $0+y^2-4.(-1)=8 \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\mp 2$.

$A_1=(0,-2,-1)$, $A_2=(0,2,-1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f(A_1)=10$, $f(A_2)=2$ olduğundan; $A_2=(0,2,-1)\in M$ noktası $(0,1,0)$ noktasına M üzerinde en yakın noktadır.

$\lambda = \frac{1}{2}$ için $z = -2\lambda$ dan $z = -2.\frac{1}{2} = -1$

C-4) $M_1=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2+x_2^2=4\}\subset E^3$,

$M_2=\{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1^2-x_2^2-2x_3=0\}\subset E^3$

yüzeylerinin arakesiti olan eğrinin $Q=(1,\sqrt{3},?)$ noktasındaki eğriliklerini bulunuz.

ÇÖZÜM: $x_1^2+x_2^2=4 \Rightarrow x_1=2\cos t,\ x_2=2\sin t$ yazabiliriz.

$x_1^2-x_2^2-2x_3=0 \Rightarrow 4\cos^2 t-4\sin^2 t=2x_3$

$$\Rightarrow x_3=2\cos^2 t-2\sin^2 t=2(\underbrace{\cos^2 t-\sin^2 t}_{\cos 2t})$$

$$\Rightarrow x_3=2\cos 2t.$$

Buna göre; M_1 ve M_2 yüzeylerinin arakesit eğrisinin bir parametrizasyonu

$$\alpha: I \longrightarrow M_1\cap M_2 \subset E^3$$
$$t \longrightarrow \alpha(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 2\cos 2t)$$

dir. Buradan,

$$\left.\begin{array}{l} x_1(P)=1 \Rightarrow 1=2\cos t \Rightarrow \cos t=1/2 \\ x_2(P)=\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}=2\sin t \Rightarrow \sin t=\sqrt{3}/2 \end{array}\right\} \Rightarrow t=\frac{\pi}{3}.$$

$x_3(P)=2\cos 2.\frac{\pi}{3}=2\cos\frac{2\pi}{3}=2.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ dir. O halde,

$Q=(1,\sqrt{3},-1)$ olarak elde edilir.

$\alpha'(t)=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ -4\sin 2t) \Rightarrow \alpha'(\pi/3)=(-\sqrt{3},\ 1,\ -2\sqrt{3})$,

$\alpha''(t)=(-2\cos t,\ -2\sin t,\ -8\cos 2t) \Rightarrow \alpha''(\pi/3)=(-1,\ -\sqrt{3},\ 4)$,

$\alpha'''(t)=(2\sin t,\ -2\cos t,\ 16\sin 2t) \Rightarrow \alpha'''(\pi/3)=(\sqrt{3},\ -1,\ 8\sqrt{3})$.

$$k_1(\pi/3)=\frac{\|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|}{\|\alpha'(\pi/3)\|^3} \quad \text{ve} \quad k_2(\pi/3)=\frac{\det(\alpha'(\pi/3),\alpha''(\pi/3),\alpha'''(\pi/3))}{\|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|^2}$$

formüllerinden $k_1(\pi/3)$ ve $k_2(\pi/3)$ değerlerini hesaplayalım.

$$\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sqrt{3} & 1 & -2\sqrt{3} \\ -1 & -\sqrt{3} & 4 \end{vmatrix}=-2e_1+6\sqrt{3}\,e_2+4e_3$$

$$\Rightarrow \|\alpha'(\pi/3)\times\alpha''(\pi/3)\|=\sqrt{(-2)^2+(6\sqrt{3})^2+4^2}=\sqrt{128}=\sqrt{2.64}=8\sqrt{2}.$$

$$\| \alpha'(\pi/3) \| = \sqrt{16} = 4$$

$$\det(\alpha'(\pi/3), \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3)) = \langle \alpha'(\pi/3) \wedge \alpha''(\pi/3), \alpha'''(\pi/3) \rangle$$
$$= \langle (-2, 6\sqrt{3}, 4), (\sqrt{3}, -1, 8\sqrt{3}) \rangle$$
$$= -2\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 32\sqrt{3}$$
$$= 24\sqrt{3}.$$

$$k_1(\pi/3) = \frac{8\sqrt{2}}{16 \cdot 4} = \frac{\sqrt{2}}{8},$$

$$k_2(\pi/3) = \frac{\overset{3}{\cancel{24}}\sqrt{3}}{\underset{8}{\cancel{64}} \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \quad \text{bulunur.}$$

C-5) Tanım (Şekil Operatörü): E^n in bir hiperyüzeyi M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^n de Riemann Konneksiyonu D olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$S(X) = D_X N$$

şeklinde tanımlı, S dönüşümüne M üzerinde şekil operatörü veya M nin Weingarten dönüşümü denir.

Şimdi S şekil operatörünün lineer olduğunu gösterelim:

$\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$S(aX + bY) = D_{aX+bY} N$, D Riemann Konneksiyonu old. dan,

$$= a D_X N + b D_Y N$$

$$= a S(X) + b S(Y)$$

bulunur. O halde S dönüşümü lineerdir.